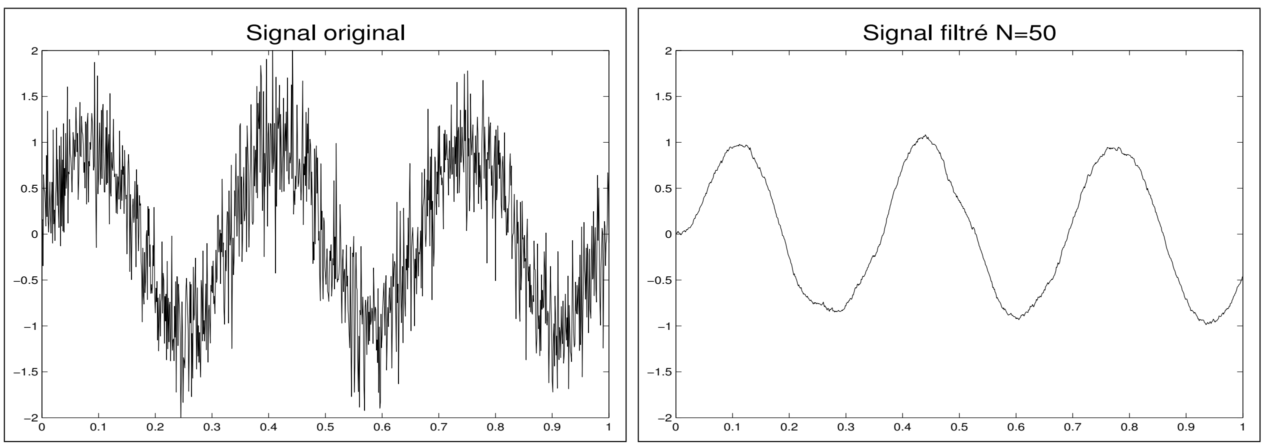
Télécom Physique Strasbourg **Module 2201**

TRAITEMENT DU SIGNAL ALÉATOIRE



Réponses des exercices

Fabrice Heitz

Septembre 2014

(Certains exercices sont partiellement adaptés de M. Charbit, Éléments de théorie du signal : les signaux aléatoires*, Ellipses, 1990.)*

1 Stationnarité, ergodicité, fonction d'autocorrélation, densité spectrale de puissance

Exercice 2

On considère un signal aléatoire réel à temps discret $X(n,\omega)$. Les variables aléatoires $X(n,\omega)$, $n \in Z$ sont supposées indépendantes, de même valeur moyenne μ et de même variance σ^2.

Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_X(n_1, n_2) = \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)]$. Le signal X est-il stationnaire au second ordre ? Quel est la nature du signal aléatoire X ?

Mêmes questions pour le signal $Y(n,\omega) = n\, X(n-1,\omega)$.

Réponses :
$R_X(n_1, n_2) = \sigma^2\delta(n_1 - n_2) + \mu^2$ où $\delta(n)$ est l'impulsion unité.
$X(n)$ est stationnaire au second ordre.
$X(n)$ est un bruit blanc discret de moyenne μ et de variance σ^2.
$R_Y(n_1, n_2) = n_1 n_2[\sigma^2\delta(n_1 - n_2) + \mu^2]$
$\mathbb{E}[Y(n)] = n\mu$; variance de $Y(n) = n^2\sigma^2$
$Y(n)$ n'est pas stationnaire.

Exercice 3 : Signal sinusoïdal à fréquence aléatoire

On considére le signal aléatoire :

$$X(t,\omega) = a\, e^{j(2\pi F(\omega)t\, +\, \varphi)}$$

La fréquence de l'exponentielle complexe est une variable aléatoire $F(\omega)$ (de densité de probabilité $p_F(f)$), équirépartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$. a et φ sont supposées constantes.

1. Représenter des réalisations de $\mathrm{Re}[X(t,\omega)]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X(t,\omega)]$ et $\overline{X(t,\omega)}$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X(t,\omega)X^*(t-\tau,\omega)]$ et $\overline{X(t,\omega)X^*(t-\tau,\omega)}$.
4. Que peut-on en conclure sur la stationnarité et l'ergodicité de ce signal ?

Réponses :
1. voir ex. 5 fait en TD.
2. $\mathbb{E}[X(t,\omega)] = ae^{j(2\pi f_0 t\, +\, \varphi)}\,\mathrm{sinc} 2\Delta f t$; $\overline{X(t,\omega)} = 0$.
3. $\mathbb{E}[X(t,\omega)X^*(t-\tau,\omega)] = a^2 e^{j(2\pi f_0 \tau)}\,\mathrm{sinc} 2\Delta f \tau$; $\overline{X(t,\omega)X^*(t-\tau,\omega)} = a^2 e^{j(2\pi F(\omega)\tau)}$
4. Ce signal a une moyenne statistique non constante, donc il n'est pas stationnaire au second ordre. On remarque toutefois que sa fonction d'autocorrélation statistique ne dépend que de τ (stationnarité de l'autocorrélation). Il n'est pas ergodique.

Exercice 4 : Interprétation du coefficient de corrélation : mesure de similarité entre signaux

Dans un signal, l'information utile est souvent représentée par les fluctuations du signal autour de sa valeur moyenne. Pour définir une mesure de la ressemblance ou de la dissemblance de deux signaux, on est donc amené à les comparer *indépendamment* du décalage de leur composante continue et de leur niveau d'amplification éventuel. La mesure de ressemblance va donc s'appuyer sur la différence résiduelle entre les deux signaux, après ajustement de leur composante continue et de leur facteur d'amplification.

Soit $X(t,\omega)$ et $Y(t,\omega)$ deux signaux aléatoires à comparer. $X(t,\omega)$ et $Y(t,\omega)$ sont représentés à l'instant t par des *variables aléatoires* notées X et Y respectivement.

L'écart quadratique, à l'instant t, entre les deux signaux (après ajustement) s'écrit :

$$\epsilon^2 \;=\; \mathbb{E}[|Y \;-\; aX \;-\; b|^2]$$

où a et b sont deux coefficients à ajuster.

1. Calculer la valeur minimale ϵ^2_{min} de ϵ^2 par rapport aux coefficients a et b (en fonction de $m_x = \mathbb{E}[X],\ m_y = \mathbb{E}[Y],\ \sigma_x^2,\ \sigma_y^2$ et $\mathbb{E}[XY]$).
2. Étudier les variations de ϵ^2_{min} en fonction du coefficient de corrélation ρ entre X et Y :

$$\rho \;=\; \frac{\mathbb{E}(XY) \;-\; \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sigma_x\sigma_y} \;=\; \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]}{\sigma_x\sigma_y}$$

Réponses :

1. $\epsilon^2(a,b) = \mathbb{E}[Y^2] + a^2\mathbb{E}[X^2] + b^2 - 2a\mathbb{E}[XY] - 2b\mathbb{E}[Y] + 2ab\mathbb{E}[X]$
Les valeurs de a et b qui minimisent $\epsilon^2(a,b)$ sont : $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho \qquad b = m_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x$
On en déduit : $\epsilon^2_{min} = \sigma_y^2(1-\rho^2)$.
2. $\epsilon^2_{min} = \sigma_y^2(1-\rho^2)$ est étudié en fonction de ρ, pour $-1 \le \rho \le 1$ (car ϵ^2_{min} est forcément ≥ 0). Il s'agit d'une parabole.
• Si $|\rho| \simeq 1$ (très forte corrélation entre Y et X) alors $\epsilon^2_{min} \simeq 0$ et donc $Y \simeq aX + b$, ce qui montre qu'on a une relation linéaire entre Y et X.
• Si $|\rho| = 0$ on a décorrélation entre Y et X :
$\mathbb{E}(XY) \;=\; \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ ou encore : $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))] = 0$.
L'erreur ϵ^2_{min} passe alors par son maximum (pas de relation linéaire entre Y et X).

---

2 Filtrage des signaux aléatoires

Exercice 9 : Filtrage d'ordre 1 d'une suite aléatoire

On considère le filtre numérique défini par la relation de récurrence suivante :

$$y(n) \;-\; \frac{1}{2}y(n-1) \;=\; x(n)$$

avec la condition initiale : $y(n) = 0, \text{ pour } n < 0.$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre défini par cette relation. Ce filtre est-il stable ?
2. En déduire l'expression suivante pour le module de sa réponse en fréquence :

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi f)}}$$

   Représenter l'allure de $|H(f)|^2$.
3. Calculer sa réponse impulsionnelle $h(n)$ de deux façons différentes :
   – en revenant à la définition de la réponse impulsionnelle ;
   – en partant de $H(z)$.
   On rappelle que pour $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

4. On suppose que $X(n)$ est un signal aléatoire, stationnaire au second ordre, centré et de fonction d'autocorrélation :

$$R_X(k) = \begin{cases} 1 & si\ k = 0 \\ \frac{1}{2} & si\ k \pm 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

   Déterminer la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ de la suite aléatoire $X(n)$. Représenter son allure.
5. Calculer la d.s.p. $S_Y(f)$ de la suite aléatoire $Y(n)$ observée en sortie du filtre. Représenter son allure.

Réponses :

1. $H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Filtre stable.
2. $H(f)$ est périodique de période 1, c'est un filtre passe-bas.
3. $h(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
4. $S_X(f) = 1 + \cos(2\pi f)$, périodique de période 1.
5. $S_Y(f) = \frac{1+\cos(2\pi f)}{\frac{5}{4}-\cos(2\pi f)}$, périodique de période 1.

---

3 Estimation statistique

Exercice 12 : Estimation d'un paramètre de moyenne *et* variance au sens du maximum de vraisemblance

On considère la séquence de données suivante :

$$X(n) \; = \; A \; + \; W(n), \quad n = 1, \ldots, N.$$

où A est une constante ($A > 0$), $W(n)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et *de variance inconnue* A.

1. Déterminer la densité de probabilité conjointe des N variables aléatoires $X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(N)$.
2. En déduire l'estimateur, au sens du maximum de vraisemblance du paramètre inconnu A.

Réponses :

1. $f_{X(1),...,X(N)}(x_1, ..., x_N, A) = (2\pi A)^{-\frac{N}{2}} \exp[-\frac{1}{2A} \sum_{n=1}^{N} (x_n - A)^2]$
2. $\hat{A}_{MV} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 + \frac{1}{4}}$

Exercice 13 : Estimateurs de la variance

On souhaite estimer la variance d'un signal aléatoire stationnaire discret $X(n)$ (dont les échantillons sont supposés indépendants) à partir d'une réalisation (composée de N échantillons). Sa moyenne est notée m_X, sa variance σ_X^2

On considère deux cas :

– Cas 1 : la moyenne statistique m_X du signal est connue. L'estimateur de la variance est :

$$\hat{\sigma}_{1N}^2 \; = \; \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (X(n) \; - \; m_X)^2$$

– Cas 2 : la moyenne statistique m_X est inconnue et estimée conjointement par la formule :

$$\hat{m}_X \; = \; \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)$$

On adopte pour estimateur de la variance dans ce cas :

$$\hat{\sigma}_{2N}^2 \; = \; \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (X(n) \; - \; \hat{m}_X)^2$$

Déterminer les biais de ces deux estimateurs.

Réponses :

$b(\hat{\sigma}_{1N}^2) = 0$ (estimateur non biaisé)

$b(\hat{\sigma}_{2N}^2) = -\frac{\sigma_X^2}{N}$ (estimateur biaisé)

Remarque : $\hat{\sigma}_{3N}^2 \; = \; \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (X(n) \; - \; \hat{m}_X)^2$ est non biaisé (le démontrer).